Аннотация

В работе рассмотрен вопрос о равномерном приближении заданной на отрезке непрерывной функции. Приближение производится при помощи функции с абсолютно непрерывной производной порядка $(n-1)$ и ограниченной по модулю производной порядка n. Приводится критерий альтернансного типа для элемента наилучшего приближения в этом классе. Данный критерий обобщает полученный Н. П. Корнейчуком критерий элемента наилучшего приближения в классе липшицевых функций.

Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной

А. В. Мироненко *

УДК 517.518.6

1 Постановка задачи

Пусть $C[a,b]$ — это пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[a,\,b]} = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Пусть $AC^{n-1}[a,b]$ — класс функций, заданных на отрезке $[a,b]$ и имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$. Через $\mathcal{D}^n \subset AC^{n-1}[a,b]$ обозначим подкласс функций, имеющих ограниченную единицей производную порядка n, т.е.

$$\mathcal{D}^n = \{g \in AC^{(n-1)}[a,b] : \left|g^{(n)}(x)\right| \leq 1 \text{ всюду, где существует } g^{(n)}(x)\}.$$

Зафиксируем произвольную непрерывную функцию $f \in C[a,b]$. Назовем g_* - элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для функции f в классе $\mathcal{D}^n$, если выполняется равенство

$$\|f - g_*\| = \min\{\|f - g\| : g \in \mathcal{D}^n\}. \tag{1}$$

Задачу о характеризации таких элементов наилучшего приближения при $n = 1$ рассматривал Н. П. Корнейчук [1, стр. 219-220]. При получении точной константы в теореме Джексона-Стечкина он приближал непрерывные функции при помощи функций с ограниченной константой Липшица

$$g \in \mathrm{Lip}\ 1 \iff |g(x_2) - g(x_1)| \leq |x_2 - x_1| \quad \forall\ x_1,\ x_2.$$

Эти функции являются абсолютно непрерывными, следовательно, их первая производная существует почти всюду. Кроме того, она ограничена по модулю единицей, т.е. $\mathrm{Lip}\ 1 = \mathcal{D}^1$. Н. П. Корнейчуком была указана характеризация ближайших элементов в классе $\mathcal{D}^1$ на языке „жесткого звена“, т.е. такого подмножества отрезка $[a,b]$, на котором решение аналогичной локальной задачи дает единственный э.н.п., и величина наилучшего приближения совпадает с величиной наилучшего приближения в задаче (1). Основным целью данной статьи является обобщение результата Н. П. Корнейчука на случай $n > 2$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №02-01-00782

2 Основной результат

Пусть приближаемая функция $f \in C[a,b]$ — фиксирована.

Определение *Набор точек $x_1 < x_2 < ... < x_k$ из отрезка $[c,d] \subseteq [a,b]$ назовём* **альтернансом** *для $g \in \mathcal{D}^n$, если $(f-g)(x_i) = (-1)^{i+1} \cdot \operatorname{sign}(f-g)(x_1) \cdot \|f-g\|$ при $i = 1, ..., k$.*

Теорема 1 *(Н. П. Корнейчук) Пусть $f \in C[a,b] \backslash \mathcal{D}^1$. Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^1$ была э.н.п. для функции f, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a,b]$ нашёлся альтернанс из двух точек $x_1 < x_2$ такой, что*

1. $g'_*|_{(x_1,\, x_2)} \equiv -\operatorname{sign}(f-g_*)(x_1)$.

Основным результатом данной статьи является теорема 2, которая обобщает на случай $n = 2, 3, \ldots$ теорему Н. П. Корнейчука.

Теорема 2
Пусть $f \in C[a,b] \backslash \mathcal{D}^n$, где $n = 1, 2, \ldots$ Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^n$ была э.н.п. для функции f, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a,b]$ нашелся набор точек $t_0 < t_1 < ... < t_s$, и на отрезке $[t_0, t_s]$ нашелся альтернанс из k точек $x_1 < x_2 < ... < x_k$ такой, что выполнились бы следующие условия:

1. *верны тождества* $g_*^{(n)}\Big|_{(t_i,\, t_{i+1})} \equiv (-1)^{n+i} \cdot \operatorname{sign}(f-g_*)(x_1)$ *для всех* $i \in \overline{0, s-1}$;
2. $k \geq s + n$.

Отметим, что при $n = 1$ из теоремы 2 следует теорема Н. П. Корнейчука, а при $n = 2$ она приобретает более простой вид:

Теорема 3 *Пусть $f \in C[a,b] \backslash \mathcal{D}^2$. Для того, чтобы функция $g_* \in \mathcal{D}^2$ была э.н.п. для функции f, необходимо и достаточно, чтобы на $[a,b]$ нашлись альтернанс из $k \geq 3$ точек $\{x_j\}_{j=1}^k$ и $k-1$ точка $t_0 < t_1 < ... < t_{k-2}$ так, что выполнились бы следующие условия:*
1) справедливы включения $x_1 \in [t_0, t_1)$, $x_k \in (t_{k-3}, t_{k-2}]$;
2) при $i \in \overline{2, k-1}$ верны включения $x_i \in (t_{i-2}, t_{i-1})$;
3) выполняются тождества $g''_*|_{(t_i,\, t_{i+1})} \equiv (-1)^i \operatorname{sign}(f-g_*)(x_1)$ при $i \in \overline{0, k-3}$.

3 Доказательство теоремы 2

3.1 Обозначения и определения

Через $Q_{+1}(g) = \{x : (f-g)(x) = \|f-g\|\}$ и $Q_{-1}(g) = \{x : (f-g)(x) = -\|f-g\|\}$ будут обозначаться множества точек максимального положительного и отрицательного уклонения функции $g \in \mathcal{D}^n$ от функции f. Поскольку функции f и g — непрерывны, то хотя бы одно из них не пусто. Кроме того, существует константа $\gamma = \gamma(g) > 0$ такая, что

$$\forall x \in Q_{+1}(g) \quad \forall y \in Q_{-1}(g) \quad |x - y| > \gamma. \tag{2}$$

Заметим, что расстояние между любыми двумя точками альтернанса также ограничено снизу γ.

Определение *Пусть задана приближающая функция $g \in \mathcal{D}^n$. Будем называть отрезок $[c,d]$ „+“-***отрезком***, если на нём нет точек из $Q_{-1}(g)$, и „−“-***отрезком***, если на нём нет точек из $Q_{+1}(g)$.*

Для краткости будем называть максимальные по включению альтернансы просто **максимальными**.

Определение **Расширенный альтернанс** *на отрезке $[c,d] \subseteq [a,b]$ для функции $g \in \mathcal{D}^n$ — есть набор множеств $\{X_i\}_{i=1}^k$ таких, что каждое множество X_i состоит из всех i-тых по счету точек в максимальных альтернансах на отрезке $[c,d]$.*

Нетрудно убедиться, что, последовательно выбрав произвольным образом по одной точке из каждого множества X_i, мы всегда получим максимальный альтернанс. Через $\overline{X_i}$ будем обозначать выпуклую оболочку множества X_i. Между множествами X_i и X_{i+1} всегда есть точка z_i, в которой $(f-g)(z_i) = 0$.

Будем говорить, что набор точек $\{x_i\}$ является **упорядоченным**, если для любого i выполняется неравенство $x_i < x_{i+1}$.

Определение *Построим для функции $g \in C[a,b]$ на отрезке $[c,d] \subseteq [a,b]$ расширенный альтернанс $\{X_i\}_{i=1}^k$.* **Альтернансным разбиением** *отрезка $[c,d]$ для функции g будем называть упорядоченный набор точек $\{z_i\}_{i=0}^k \subset [c,d]$ такой, что*

1) $(f-g)(z_i) = 0 \ \forall i \in \overline{1, k-1}$;

2) $z_0 = c$, $z_k = d$;

3) $X_i \subset (z_{i-1}, z_i) \ \forall i \in \overline{1,k}$.

Через $S_n[t_0, t_1, ..., t_s]$ обозначим класс полиномиальных сплайнов степени n и гладкости $n-1$, заданных на отрезке $[t_0, t_s]$ и имеющих узлы в точках $t_1, t_2, ..., t_{s-1}$. Определение понятия сплайна можно найти, например, в [2]. На самом деле, теоремы 1, 2 и 3 утверждают, что на некотором отрезке функция g_* будет являться сплайном из классов S_1, S_n и S_2 соответственно.

Альтернанс, удовлетворяющий всем условиям теоремы 2, для краткости мы будем называть **жёстким звеном**.

Будем говорить, что функция:

- „принимает знак + или −“ на множестве X, если существует такая точка из X, что функция в ней соответственно положительна или отрицательна;
- „сохраняет знак + или −“ на множестве X, если во всех точках из X функция соответственно принимает знак + или −;
- „меняет знак в точке x с − на + (с + на −)“, если существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что на $(x-\varepsilon, x)$ функция сохраняет знак − (+), а на $(x, x+\varepsilon)$ функция сохраняет знак + (−);
- „принимает значения с чередующимися знаками на наборе точек $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$“, если она принимает в точках a_i попеременно знаки + и −.

В дальнейшем нам также будет удобно говорить (несмотря на то, что это противоречит общепринятой терминологии), что функция „принимает знак 0“ на множестве X, если существует такая точка из X, что функция в ней равна нулю.

3.2 Вспомогательные утверждения

Сначала приведем без доказательства две простые леммы.

Лемма 1 *Пусть $n \geq 1$ и $N \geq n+1$. Если функция $g \in AC^{n-1}$ принимает в N точках $x_1 < x_2 < ... < x_N$ значения с чередующимися знаками, тогда найдутся точки $y_1 < y_2 < ... < y_{N-n}$ такие, что в них $g^{(n)}$ существует и принимает значения с чередующимися знаками, причем $\operatorname{sign} g^{(n)}(y_1) = (-1)^n \operatorname{sign} g(x_1)$.*

Следствие *В условиях леммы 1 можно утверждать не только существование точек y_j, но и существование их окрестностей, в которых $g^{(n)}$ сохраняет знак, поскольку $g^{(n)}$, как производная абсолютно непрерывной функции $g^{(n-1)}$, является непрерывной в некоторой окрестности каждой точки своего существования.*

Лемма 2 *Пусть дана функция $f \in C[a,b] \backslash \mathcal{D}^n$ и функция $g \in \mathcal{D}^n$. Пусть также дана функция $h \in AC^{n-1}[a,b]$ такая, что:*

1) $h^{(n)}$ — ограничена;

2) существует константа $\delta_1 > 0$ такая, что при $x \in O_{\delta_1}(Q_{+1}(g))$ выполняется равенство $\operatorname{sign} h(x) = 1$, и при $x \in O_{\delta_1}(Q_{-1}(g))$ выполняется равенство $\operatorname{sign} h(x) = -1$;

3) существует константа $\delta_2 > 0$ такая, что в δ_2-окрестности любой точки x_0, где выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} \left| g^{(n)}(x) \right| = 1$ выполняется неравенство $\operatorname{sign} h^{(n)} \cdot \operatorname{sign} g^{(n)} \leq 0$.

Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что для функции $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ выполнены условия $\left| g_\varepsilon^{(n)} \right| \leq \left| g^{(n)} \right| \leq 1$ и $\|f - g_\varepsilon\| < \|f - g\|$.

Лемма 3 *Пусть $n \geq 1$ и дан набор точек $t_0 < t_1 < ... < t_n$, а также набор чисел $\{r_i\}_{i=0}^{n-1}$. Пусть выполняются равенства $\operatorname{sign} r_i = (-1)^i$ при $i = 0, ..., n-1$. Тогда существует единственный сплайн $h \in S_n[t_0, t_1, ..., t_n]$, удовлетворяющий краевым условиям $h^{(i)}(t_0) = 0$ и $h^{(i)}(t_n) = r_i$ при $i \in \overline{0, n-1}$.*

Более того, выполняются следующие условия:

1) $h > 0$ на промежутке $(t_0, t_n]$,

2) $h^{(n)}$ принимает на интервалах (t_i, t_{i+1}) значения с чередующимися знаками, начиная с положительного, т.е. $\operatorname{sign}\Big(h^{(n)}\big|_{(t_i,\, t_{i+1})} \Big) = (-1)^i$ при $i = 0, ..., n-1$.

Доказательство. Существование и единственность сплайна h следуют из общей теоремы о существовании и единственности интерполяционного сплайна (ее можно найти, например, в [2, стр. 26-28]. Докажем вторую часть леммы о положительности и чередовании знаков старшей производной.

Докажем выполнение неравенства $h \geq 0$ на отрезке $[t_0, t_n]$. Предположим, что существует точка $x_0 \in [t_0, t_n]$ такая, что $h(x_0) < 0$. Так как в точках t_0 и t_n функция h принимает значения 0 и $r_0 > 0$ соответственно, то верно неравенство $t_0 < x_0 < t_n$. Это значит, что в трех последовательных точках функция h принимает знаки 0, $-$ и $+$. Применяя два раза теорему Лагранжа, мы получаем две точки x_{11} и x_{12}, в которых h' принимает знаки $-$ и $+$, причем $t_0 < x_{11} < x_0 < x_{12} < t_n$. Кроме того, из краевых условий следует, что $h'(t_0) = 0$ и $h'(t_n) = r_1 < 0$. Таким образом, мы получили четыре последовательные точки (а именно t_0, x_{11}, x_{12} и t_n), в которых h' принимает знаки 0, $-$, $+$, $-$. Применив три раза теорему Лагранжа, мы получим точки с чередующимися знаками уже для h'', и так далее. В итоге для функции $h^{(n-1)}$

найдётся (с учётом краевых условий) набор из $n+2$ точек со следующими знаками: $0, -, +, \ldots, +(-)$.

Далее применять теорему Лагранжа нельзя, т.к. в ней необходима дифференцируемость функции внутри интервала. Функция $h^{(n-1)}$ есть непрерывная ломаная с конечным числом звеньев, значит, она абсолютно непрерывна. Тогда, по лемме 1, существует $n+1$ точка, в которых $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками. С другой стороны, т.к. $h \in S_n$, то функция $h^{(n)}$ является кусочно постоянной, причем количество участков её постоянства равно n. Получили противоречие, значит

$$h \geq 0 \text{ на } [t_0, t_n]. \tag{3}$$

Докажем пункт 2) леммы, пункт 1) будет доказан ниже. Поскольку функция h принимает в точках t_0 и t_n знаки 0 и $+$, то функция h', с учётом краевых условий, принимает в трёх последовательных точках знаки 0, $+$, $-$. Точно также получаем для функции h'' знаки 0, $+$, $-$, $+$, и так далее. В итоге мы найдём $n+1$ точку, в которых $h^{(n-1)}$ принимает значения со знаками $0, +, -, \ldots, +(-)$. Отсюда, по лемме 1, будет следовать наличие у $h^{(n)}$ ровно n точек со знаками $+, -, \ldots, +(-)$. Учитывая, что функция $h^{(n)}$ есть кусочно постоянная с n участками постоянства, получаем требуемый результат.

Докажем теперь пункт 1) леммы. В самом деле, пусть у функции h есть еще один нуль (кроме t_0), обозначим его через x_0. Мы доказали, что $h^{(n)}$ нигде не равна нулю, значит, функция h не может иметь участков тождественного равенства нулю. Учитывая (3), получаем, что слева от x_0 есть точка x_1, в которой $h(x_1) > 0$. Это значит, что на участке (x_1, x_0) функция h' принимает знак $-$, а на участке (x_0, t_n) принимает знак $+$, кроме того, из краевых условий следует, что $h'(t_0) = 0$ и $h'(t_n) < 0$. Таким образом, мы получили четыре последовательные точки, в которых h' принимает знаки 0, $-$, $+$, $-$. Продолжая рассуждения, тождественные приведенным в начале доказательства этой леммы, приходим к противоречию. Таким образом, неравенство $h > 0$ выполнено на всём промежутке $(t_0, t_n]$. Лемма доказана.

Имеет место и „симметричная“лемма, а именно:

Лемма 4 *Пусть $n \geq 1$ и дан набор точек $t_0 < t_1 < \ldots t_n$, а также набор чисел $\{l_i\}_{i=0}^{n-1}$. Пусть все числа $l_i > 0$. Тогда существует единственный сплайн $h \in S_n[t_0, t_1, \ldots, t_n]$, удовлетворяющий краевым условиям $h^{(i)}(t_0) = l_i$ и $h^{(i)}(t_n) = 0$ при $i \in \overline{0, n-1}$.*

Более того, выполняются следующие условия:

1) $h > 0$ на промежутке $[t_0, t_n)$,

2) $h^{(n)}$ принимает на интервалах (t_i, t_{i+1}) значения с чередующимися знаками, начиная с отрицательного, т.е. $\operatorname{sign}\Big(h^{(n)}\big|_{(t_i,\, t_{i+1})}\Big) = (-1)^{i+1}$ при $i = 0, \ldots, n-1$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей, кроме того, ее можно получить из леммы 3 заменой переменных.

Лемма 5 *Для любых двух точек $c < d$ и любых чисел $y_0 > 0$, y_1, …, y_{n-1} существует функция $h \in AC^{(n-1)}[c, d]$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $h \geq 0$ на отрезке $[c, d]$,

2) $h(c) = h'(c) = \ldots = h^{(n-1)}(c) = 0$ и $h(d) = y_0$, $h'(d) = y_1$, …, $h^{(n-1)}(d) = y_{n-1}$,

3) $h^{(n)}$ — ограничена.

Доказательство. Дополним список условий на функцию h еще двумя: 4) $h^{(n)}(c) = 1$, и 5) $h^{(n)}(d) = 0$. Выделим на интервале (c, d) произвольный набор из n точек $a_1 < a_2 < ... < a_n$, и построим функцию $h_1 \in S_{n+1}[c, a_1, ..., a_n, d]$, удовлетворяющую условиям 2) - 5). Такой сплайн существует и единственен (см., например, [2, стр. 26-28]), но может оказаться нарушенным условие 1). Тем не менее, поскольку $h_1(d) = y_0 > 0$, и первая ненулевая производная функции h_1 в точке c больше нуля ($h_1^{(n)}(c) = 1$), мы можем утверждать, что существует константа $\delta > 0$ такая, что на промежутках $(c, c+\delta)$ и $(d-\delta, d]$ функция $h_1 > 0$.

Известно, что для любых чисел $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ существует так называемый „гладкий пенек" — функция $H \in C^\infty$, такая, что $0 \leq H \leq 1$, $H \equiv 1$ на отрезке $[a_2, a_3]$, $H \equiv 0$ на промежутках $(-\infty, a_1]$ и $[a_4, \infty)$. Построим функцию h_2 — „гладкий пенек" с условиями $h_2 \equiv 0$ на отрезках $[c, c+\delta/3]$ и $[d-\delta/3, d]$; и $h_2 \equiv 2\|h_1\|_{C[a,b]}$ на $[c + 2\delta/3, d - 2\delta/3]$; $h_2 \geq 0$. Очевидно, что функция $h = h_1 + h_2$ удовлетворяет всем условиям леммы. Лемма доказана.

Кроме того, нам понадобится так называемая теорема Будана-Фурье для сплайнов. Полную формулировку и доказательство этой теоремы можно найти в [4], мы приведём её в менее общей формулировке:

Теорема Будана-Фурье *Пусть $h \in S_n[t_0, t_1, ..., t_s]$. Тогда количество нулей сплайна h на отрезке $[t_0, t_s]$ с учетом кратности не превосходит $\dim S_n[t_0, t_1, ..., t_s] - 1 = s + n - 1$.*

Определение кратности нуля сплайна в этой теореме обобщает понятие кратности нуля обычного полинома и совпадает с ним при отсутствии у сплайна нулей в узлах. В любом случае, нуль кратности k по обычному определению будет учтен как нуль кратности не меньше k по определению теоремы Будана-Фурье.

3.3 Доказательство теоремы 2

Поскольку теорема для случая $n = 1$ доказана Н. П. Корнейчуком, то далее в доказательстве считаем, что
$$n \geq 2. \tag{4}$$

Достаточность. Докажем от противного. Пусть существует функция g, которая удовлетворяет условиям теоремы, но не является э.н.п. Поскольку множество $\mathcal{D}^n$ является замкнутым и локально компактным, то хотя бы один э.н.п. всегда существует (см., например, [3, стр. 11]), обозначим его через g_*. Рассмотрим функцию $h = g_* - g$. Поскольку функция g — не наилучшая, то $\|f - g_*\| < \|f - g\|$, значит
$$h > 0 \quad \forall x \in Q_{+1}(g) \qquad \text{и} \qquad h < 0 \quad \forall x \in Q_{-1}(g). \tag{5}$$

Это значит, что функция h принимает в точках $\{x_i\}_{i=1}^k$ чередующиеся по знаку значения, следовательно, по лемме 1, найдется $(k - n)$ точек $y_1 < y_2 < ... < y_{k-n}$ вместе с некоторыми окрестностями, в которых функция $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками. При этом $\operatorname{sign} h^{(n)}(y_1) = (-1)^n \operatorname{sign} h(x_1)$.

Согласно пункту 1 теоремы, имеется s интервалов (t_i, t_{i+1}), на которых $g^{(n)}$ поочередно равна $+1$ и -1. Предположим, что найдется такой отрезок $[t_i, t_{i+1}]$, на котором лежат две или более точек из построенного набора $\{y_j\}$. Тогда в одной из этих двух точек (а также в некоторой её окрестности) знаки функций $g^{(n)}$ и $h^{(n)}$ совпадут. Следовательно, в этой окрестности выполнено $\left|g_*^{(n)}\right| = \left|g^{(n)}\right| + \left|h^{(n)}\right| = 1 + \left|h^{(n)}\right| > 1$, т.е. $g_* \notin \mathcal{D}^n$. Таким образом, на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ лежит не более одной точки из набора $\{y_j\}$, следовательно, верно неравенство $k - n \le s$. Поскольку по пункту 2 теоремы имеет место обратное неравенство $k - n \ge s$, то можно утверждать, что $k - n = s$, и $y_j \in (t_{j-1}, t_j)$, при $j = 1, ..., s$. Возьмем точку $y_1 \in (t_0, t_1)$. Согласно пункту 1 теоремы, выполнено равенство

$$\operatorname{sign} g^{(n)}(y_1) = \operatorname{sign}\Big(g^{(n)}\Big|_{(t_0,\, t_1)}\Big) = (-1)^n \operatorname{sign}(f-g)(x_1).$$

С другой стороны, по (5) верно равенство $\operatorname{sign}(f-g)(x_1) = \operatorname{sign} h(x_1)$, значит

$$\operatorname{sign} g^{(n)}(y_1) = (-1)^n \operatorname{sign}(f-g)(x_1) = (-1)^n \operatorname{sign} h(x_1) = \operatorname{sign} h^{(n)}(y_1).$$

Таким образом, в точке $y_1 \in (t_0, t_1)$ знаки функций $g^{(n)}$ и $h^{(n)}$ совпали. Следовательно, $\left|g_*^{(n)}(y_1)\right| = \left|g^{(n)}(y_1)\right| + \left|h^{(n)}(y_1)\right| > 1$ — снова противоречие с тем, что $g_* \in \mathcal{D}^n$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть дан элемент наилучшего приближения g_*, необходимо проверить для него выполнение всех условий теоремы. Далее под **уклонением** мы будем понимать величину $\|f - g_*\|_{C[a,b]}$. Мы покажем, что если g_* не удовлетворяет условиям теоремы, то мы можем поправить её так, что уклонение уменьшится, но за пределы $\mathcal{D}^n$ мы не выйдем. Отсюда будет следовать, что g_* — не э.н.п. Доказательство мы разобьем на несколько этапов.

1 этап. Докажем, что $\left\|g_*^{(n)}\right\|_{C[a,b]} = 1$.

Предположим, что $\left\|g_*^{(n)}\right\| < 1 - r$, где $r > 0$. Построим на отрезке $[a, b]$ расширенный альтернанс $\{X_i\}$ и альтернансное разбиение. Тогда, используя конструкцию из леммы 5, легко построить функцию $h \in AC^{n-1}[a, b]$, такую, что $h(z_i) = 0$, функция $h > 0$ на тех интервалах альтернансного разбиения (z_i, z_{i+1}), где $X_i \subset Q_{+1}(g_*)$, и $h < 0$ на остальных. По лемме 2, существует функция $g_\varepsilon \in \mathcal{D}^n$, которая ближе к f, чем g_*, получили противоречие, следовательно, верно равенство $\left\|g_*^{(n)}\right\| = 1$.

2 этап. Покажем теперь, что обязательно есть интервал $(c, d) \subset [a, b]$, на котором $g_*^{(n)} \equiv 1$ (или -1). Предположим, что такого интервала не существует. Определим множество M как

$$M = \left\{ x \in [a, b] : \overline{\lim_{x \to x_0}} \left|g_*^{(n)}(x)\right| = 1 \right\}.$$

Обозначим через $\overline{M} = [a, b] \backslash M$. Точки из M не могут лежать всюду плотно на каком-либо интервале (т.к., в силу отсутствия у производных устранимых разрывов, это и даст искомый интервал (c, d)), следовательно, на любом интервале есть подинтервалы, лежащие в $\overline{M}$ (там либо $\left|g_*^{(n)}\right| < 1$, либо $g_*^{(n)}$ не существует). Более того, на любом отрезке $[u, v] \subset \overline{M}$, выполнено $\left\|g_*^{(n)}\right\|_{C[u,\, v]} < 1 - r([u, v])$ для некоторой константы $r([u, v]) > 0$, зависящей от $[u, v]$.

Разделим весь отрезок $[a, b]$ на отрезки $[u_i, u_{i+1}]$ с длиной меньшей, чем $\gamma/4$. По формуле (2) получим, что любой отрезок $[u_{i-1}, u_{i+2}]$ обязательно является „+“- или „−“-отрезком. Рассмотрим произвольный отрезок $[u_i, u_{i+1}]$, пусть для определенности это „−“-отрезок.

На отрезке $[u_i, u_{i+1}]$ определим функцию $h_1(x) = g_*(x) + A$, где $A > 2\|g_*\|$, тогда на этом отрезке будут выполнены неравенство $h_1 > 0$ и равенство $h_1^{(n)} = g_*^{(n)}$. Продолжим функцию h_1 на отрезки $[u_{i-1}, u_i]$ и $[u_{i+1}, u_{i+2}]$ (если они существуют), соблюдая гладкость порядка $n-1$, при помощи двух полиномов степени $n-1$. Пусть $B = \|h_1\|_{C[u_{i-1},\,u_{i+2}]}$. Определим на отрезке $[u_{i-1}, u_{i+2}]$ функцию $h = h_1 + 3B$, тогда на отрезке $[u_{i-1}, u_{i+2}]$ выполнится неравенство $h > 0$, а на отрезке $[u_i, u_{i+1}]$ выполнится равенство $h^{(n)} = g_*^{(n)}$. Выделим внутри отрезка $[u_{i-1}, u_i]$ отрезок $[u, v] \subset \overline{M}$ (он существует в силу неплотности M). По лемме 5, можно построить положительную функцию $h_2 \in AC^{n-1}[u,v]$ такую, что $h_2^{(i)}(u) = 0$ и $h_2^{(i)}(v) = h^{(i)}(v)$ для $i \in \overline{0, n-1}$. Переопределим на отрезке $[u,v]$ функцию $h \equiv h_2$, а при $x < u$ положим $h(x) \equiv 0$. Проделаем аналогичные действия на отрезке $[u_{i+1}, u_{i+2}]$. В результате мы получили функцию h со следующими свойствами:

1) $h \geq 0$,

2) $h \in AC^{n-1}[a,b]$, и, следовательно, ограничена,

3) $h^{(n)}$ — ограничена на всем отрезке $[a,b]$, при этом на отрезке $[u_i, u_{i+1}]$ верно равенство $\operatorname{sign} h^{(n)} = \operatorname{sign} g_*^{(n)}$,

4) вне отрезка $[u_i, u_{i+1}]$ выполняется условие: $h^{(n)}(x) \neq 0$ только на отрезках из $\overline{M}$, т.е. там, где $\left|g_*^{(n)}\right| < 1 - r([u,v])$,

5) $h \equiv 0$ вне отрезка $[u_{i-1}, u_{i+2}]$.

Функция h удовлетворяет лемме 2, следовательно, существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что $\|f - (g_* - \varepsilon h)\| \leq \|f - g_*\|$ и $(g_* - \varepsilon h) \in \mathcal{D}^n$. После вычитания добавки εh из g_* на отрезке $[u_i, u_{i+1}]$ не останется точек максимального уклонения, при этом мы не выйдем за пределы $\mathcal{D}^n$, и не увеличится общее уклонение от f. Проделав такую операцию на всех полученных интервалах разбиения, мы равномерно уменьшим уклонение на всём отрезке $[a,b]$. Снова пришли к противоречию с тем, что g_* — э.н.п.

Таким образом, найдётся хотя бы один интервал, на котором $g_*^{(n)} \equiv 1$ (или -1).

3 этап. Рассмотрим доказательство предыдущего этапа. Фактически, мы доказали следующее утверждение: если есть некоторый отрезок $[u,v]$, к которому с двух сторон примыкают интервалы (u_1, u) и (v, v_1), лежащие в $\overline{M}$, причем (u_1, v_1) является „+“- или „−“-интервалом, то можно построить такую поправку εh к функции g_*, которая в целом на $[a,b]$ не увеличивает уклонение и не выводит g_* за пределы $\mathcal{D}^n$, но локально на (u_1, v_1) уменьшает уклонение и удаляет точки из M.

Значит, можно считать, что множество M состоит только из отрезков длиной не менее чем $\gamma/4$, т.к. более мелкие отрезки и изолированные точки будут заведомо „+“- или „−“-отрезками, и иметь примыкающие интервалы, лежащие в $\overline{M}$.

4 этап. Назовем **участком пилообразности** набор смежных интервалов, на которых поочерёдно $g_*^{(n)} \equiv 1$ или $g_*^{(n)} \equiv -1$. Друг от друга интервалы отделены точками разрыва функции $g_*^{(n)}$. Под **мощностью** участка пилообразности мы будем понимать количество смежных интервалов, из которых он состоит.

Выше мы доказали, что если функция g_* — э.н.п., то существует хотя бы один участок пилообразности, по крайней мере из одного интервала. Кроме того, можно считать, что всё множество M есть объединение конечного числа участков пилообразности, которые, впрочем, могут состоять из бесконечного числа смежных интервалов. На любом интервале внутри участка пилообразности точки разрыва $g_*^{(n)}$ не могут быть всюду плотны (так как тогда $g_*^{(n)}$ на этом интервале не существует), но они могут иметь точки сгущения. Точки сгущения разрывов также не могут быть плотны на любом интервале. Это значит, что в любой достаточно малой окрестности любой точки сгущения нет других точек сгущения и, следовательно, есть (по крайней мере с одной стороны от неё) участок пилообразности из произвольного конечного количества интервалов.

Пусть имеется некоторый отрезок $[u, v] \subset [a, b]$ такой, что непосредственно слева и справа к нему примыкают два участка пилообразности, состоящих из $n+1$ смежного интервала: $\{(u_{i-1}, u_i)\}_{i=-n-1}^{0}$ и $\{(v_j, v_{j+1})\}_{j=0}^{n+1}$, причём $u_0 = u$ и $v_0 = v$. Покажем, что если отрезок $[u_{-n-1}, v_{n+1}]$ является „+“- или „−“-отрезком, то можно построить поправку к g_*, которая локально на этом участке уменьшит $\left|g_*^{(n)}\right|$ и одновременно удалит все точки максимального уклонения.

В самом деле, если это „−“-отрезок, то, по лемме 2, достаточно вычесть из g_* достаточно малую положительную функцию εh, такую, что на отрезке $[u_{-n-1}, v_{n+1}]$ выполнено тождество $\operatorname{sign} g_*^{(n)} \equiv \operatorname{sign} h^{(n)}$. При этом не важно, сколько точек сгущения лежит на отрезке $[u, v]$. Покажем, что мы можем построить функцию h, удовлетворяющую условиям леммы 2. Определим на отрезке $[u, v]$ функцию

$$h(x) = g_*(x) + A + B \cdot \left(x - \frac{u+v}{2}\right)^{n-1}.$$

Видно, что выполняется равенство $h^{(n)} = g_*^{(n)}$. Кроме того, увеличивая A, можно добиться того, чтобы выполнилось неравенство $h > 0$ на отрезке $[u, v]$, а, увеличивая B, можно добиться ещё и выполнения равенств

$$\operatorname{sign} h^{(i)}(u) = (-1)^i \text{ и } \operatorname{sign} h^{(i)}(v) = 1 \text{ при } i \in \overline{0, n-1}.$$

Построим сплайн $h_1 \in S_n[u_{-n}, u_{-n+1}, ..., u_0]$ определяемый следующими краевыми условиями: при $i \in \overline{0, n-1}$ выполняются равенства $h_1^{(i)}(u_{-n}) = 0$ и $h_1^{(i)}(u_0) = h^{(i)}(u_0)$. По лемме 3, такой сплайн существует. Также построим сплайн $h_2 \in S_n[v_0, v_1, ..., v_n]$ с краевыми условиями $h_2^{(i)}(v_n) = 0$ и $h_2^{(i)}(v_0) = h^{(i)}(v_0)$, при $i \in \overline{0, n-1}$. Этот сплайн существует по лемме 4. Пусть функция h на отрезке $[u_{-n}, u_0]$ равна функции h_1, а на отрезке $[v_0, v_n]$ — функции h_2. Если окажется, что знаки функций $g_*^{(n)}$ и $h^{(n)}$ на отрезке $[u_{-n}, u_0]$ противоположны, тогда необходимо присоединить к $[u, v]$ интервал (u_1, u_0) и повторить все рассуждения на отрезке $[u_{-n-1}, u_1]$. Мы снова попадем в условия леммы 3, но на этот раз знаки $g_*^{(n)}$ и $h^{(n)}$ будут совпадать. При необходимости, аналогично можно поступить и на отрезке $[v_0, v_{n+1}]$.

Получили функцию h, удовлетворяющую условиям леммы 2, значит, существует константа $\varepsilon > 0$ такая, что $(g_* - \varepsilon h) \in \mathcal{D}^n$, и на отрезке $[u_{-n}, v_n]$ нет точек из множеств $Q_{+1}(g_* - \varepsilon h)$ и $Q_{-1}(g_* - \varepsilon h)$ и участков пилообразности функции $(g_* - \varepsilon h)$.

Таким образом, если участок пилообразности является „+“- или „−“-отрезком и на нём можно выделить по $n+1$ смежному интервалу с каждого конца, то он состоит не более чем из $2n+3$ интервалов. Следовательно, можно считать, что у нас нет точек сгущения, к которым точки разрывов сгущаются с двух сторон, поскольку достаточно малая окрестность самой точки сгущения будет заведомо „+“- или „−“-отрезком, а также будет иметь по любому конечному (в том числе и мощностью $n+1$) набору интервалов с каждого конца и являться участком пилообразности мощности больше, чем $2n+3$. Кроме того, мы можем считать, что у односторонних точек сгущения со стороны сгущения участок пилообразности сколь угодно короткий, а далее есть интервал, на котором $\left|g_*^{(n)}\right| < 1 - \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и нет точек максимального уклонения. Таким образом, можно считать, что есть только участки пилообразности конечной мощности, возможно с примыкающими к ним на краях точками сгущения.

5 этап. Далее мы будем рассматривать максимальные по включению участки пилообразности, состоящие из конечного числа интервалов. Мы покажем, что если на участке пилообразности нет жёсткого звена, то можно построить поправку к g_*, которая на этом участке одновременно уменьшит уклонение и уменьшит модуль $g_*^{(n)}$, тем самым мы избавимся от этого участка пилообразности. Действуя таким образом, мы или найдём требуемый теоремой альтернанс, или покажем, что g_* не является э.н.п.

Рассмотрим произвольный максимальный по включению участок пилообразности конечной мощности. Пусть количество его интервалов равно s, тогда замыкание набора его интервалов есть отрезок $[t_0, t_s]$. Из максимальности по включению следует, что либо существует константа $\delta > 0$ такая, что на интервале $(t_0 - \delta, t_0)$ выполнено неравенство $\left|g_*^{(n)}(x)\right| < 1$, либо t_0 — односторонняя точка сгущения (разрывы сгущаются слева). В обоих случаях мы можем считать, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на интервале $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 - \varepsilon)$ нет точек максимального уклонения и выполнено неравенство $\left|g_*^{(n)}\right| \le 1 - \varepsilon_1$ для какой-то константы $\varepsilon_1 > 0$. Аналогично можно считать, что на интервале $(t_s + \varepsilon, t_s + 2\varepsilon)$ выполнено неравенство $\left|g_*^{(n)}\right| \le 1 - \varepsilon_1$.

От противного. Предположим, что на отрезке $[t_0, t_s]$ пункт 2 не выполняется, т.е. какие бы альтернансы (с учётом пункта 1 теоремы) мы ни рассматривали, они были бы малой мощности (т.е. $k < s + n$). Покажем, что в этом случае можно построить функцию h такую, что для функции $g_* + \varepsilon h$ при достаточно малом ε выполняется $\|f - (g_* + \varepsilon h)\| \le \|f - g_*\|$, $g_* + \varepsilon h \in \mathcal{D}^n$, и отрезок $[t_0, t_s]$ не является участком пилообразности функции $g_* + \varepsilon h$. При этом у $g_* + \varepsilon h$ не появится участков пилообразности, не существовавших у g_*.

Построим сначала на $[t_0, t_s]$ функцию h такую, что

$$h > 0 \text{ на } Q_{+1}(g_*) \quad \text{и} \quad h < 0 \text{ на } Q_{-1}(g_*), \tag{6}$$

и кроме того,

$$\operatorname{sign} h^{(n)} = -\operatorname{sign} g_*^{(n)}. \tag{7}$$

Продолжим построенную функцию h влево от точки t_0 с гладкостью $n-1$ полиномом степени $n-1$ до точки $t_0 - \varepsilon$. Поскольку число ε сколь угодно мало, то можно считать, что выполнено равенство $\operatorname{sign}\Big(h|_{(t_0-\varepsilon,\, t_0)}\Big) = \operatorname{sign} h(t_0)$. Далее продолжим функцию h на интервал $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 - \varepsilon)$ по лемме 5 так, чтобы „гладко занулиться“ в точке $t_0 - 2\varepsilon$, т.е. чтобы выполнились условия $h^{(i)}(t_0 - 2\varepsilon) = 0$, при $i \in 0, ..., n-1$. Совершенно аналогично поступим и справа от точки t_s. Получим функцию h, удовлетворяющую лемме 2. Следовательно, мы сможем избавиться от участка пилообразности $[t_0, t_s]$, вне зависимости от возможного наличия точек сгущения на его концах.

Таким образом, для доказательства теоремы нам необходимо показать, что если на отрезке $[t_0, t_s]$ нет жесткого звена, то мы можем построить на $[t_0, t_s]$ добавку h с условиями (6) и (7). При этом поведение этой добавки вне отрезка $[t_0, t_s]$ можно не учитывать, мы всегда сможем её продолжить за пределы отрезка $[t_0, t_s]$ описанным выше образом.

Мы будем строить функцию h в виде сплайна из класса $S_n[t_0, t_1, ..., t_s]$. Ниже мы наложим на h такие интерполяционные условия, чтобы выполнилось требование (6). Эти условия будут строиться по множествам расширенного альтернанса. Возможно, что условий будет недостаточно для однозначного определения сплайна, в этом случае мы будем налагать дополнительные условия на сплайн. Это будет удобнее делать, добавляя в альтернанс „фиктивные точки“. При построении интерполяционных условий мы не будем различать настоящие и фиктивные точки альтернанса. Поскольку мы будем только добавлять условия, то сплайн, построенный с учетом новых условий, будет удовлетворять нашим начальным требованиям. Кроме того, мы будем расширять отрезок $[t_0, t_s]$, т.е. увеличивать область определения сплайна, что тоже никак не скажется на выполнении требований (6) и (7) на исходном отрезке $[t_0, t_s]$. Мы покажем ниже, что наши интерполяционные условия влекут условие (7). С учётом всех этих оговорок, приступим к построению функции h.

Построим на отрезке $[t_0, t_s]$ расширенный альтернанс $\{X_i\}_{i=1}^k$. Обозначим через S_i знак уклонения на множестве X_i, т.е. $S_i = \operatorname{sign}\Big((f - g_*)|_{X_i}\Big)$. Поскольку $[t_0, t_s]$ — участок пилообразности, то на каждом интервале (t_i, t_{i+1}) функция $g_*^{(n)} \equiv +1$ или -1, значит, можно ввести следующее обозначение: $G_i = \operatorname{sign}\Big(g_*^{(n)}\Big|_{(t_i,\, t_{i+1})}\Big)$.

Поскольку на отрезке $[t_0, t_s]$ нет жёсткого звена, то верны неравенства

$$\begin{array}{lll} k \le s + n - 1, & \text{если} & G_0 = (-1)^n S_1, \\ k \le s + n, & \text{если} & G_0 = -(-1)^n S_1. \end{array} \tag{8}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$G_0 = -(-1)^n S_1. \tag{9}$$

В самом деле, если это не так, то мы можем добавить фиктивную точку альтернанса $x_0 = t_0 - 1$ со знаком уклонения $-S_1$ и принять за $[t_0, t_s]$ новый отрезок $[t_0 - 1, t_s]$. Будем считать, что на добавленной части отрезка $[t_0, t_s]$ выполняется равенство $\operatorname{sign} g_*^{(n)} = \operatorname{sign}\Big(g_*^{(n)}\Big|_{(t_0,\, t_1)}\Big)$. Ясно, что если у нас до добавления не было жёсткого звена, то оно и не появилось, т.к. добавленная точка не может попасть в требуемый теоремой альтернанс из-за условия пункта 1 теоремы. В дальнейшем будем считать, что точки альтернанса пронумерованы с 1 до k, выполнено условие (9), а также (это следует из (8)), что

$$k \le s + n.$$

Рассмотрим три случая: $k = s + n$, $k = s + n - 1$ и $k \le s + n - 2$.

а) Случай $k = s + n$.

Построим на $[t_0, t_s]$ альтернансное разбиение $\{z_i\}_{i=0}^k$. Введем набор точек $\{y_i\}_{i=0}^k$. Определим для начала $y_i = z_i$, далее часть точек мы изменим. Для нас будет важно только то, что, начиная с y_1, они отделяют множества X_i друг от друга. Для краткости будем говорить, что $y < X_i$, если неравенство $y < x$ верно для всех $x \in X_i$. Таким образом, верны неравенства $X_i < y_i < X_{i+1}$.

Наложим на h следующие k интерполяционных условий: $h(y_0) = S_1$, $h(y_i) = 0$ при $i \in \overline{1, k-1}$. Необходимое и достаточное условие существования и единственности такого интерполяционного сплайна заключается (см., например, [2, стр. 26-28]) в справедливости неравенств $y_{i-1} < t_i < y_{i+n}$ при $i \in \overline{1, s-1}$ и в выполнении равенства $k = s + n$. Вообще говоря, для исходного набора $\{y_i\}_{i=0}^k$ указанные неравенства могут и не выполниться, но мы покажем, что можно набор слегка изменить так, что неравенства выполнятся, и при этом по-прежнему будет $X_{i+n} < y_{i+n} < X_{i+n+1}$.

Рассмотрим правое неравенство: $t_i < y_{i+n}$. Пусть оно не выполняется. Рассмотрим отрезок $[t_0, t_i]$. С ним пересекается не более $i+n$ множеств расширенного альтернанса (иначе на нем есть жесткое звено), значит, верно неравенство $t_i < X_{i+n+1}$. Следовательно, точку y_{i+n} можно выбрать так, что выполнятся неравенства $t_i < y_{i+n} < X_{i+n+1}$.

Аналогично добьемся выполнения неравенства $y_{i-1} < t_i$. Рассмотрим отрезок $[t_i, t_s]$. На нем не более $s - i + n$ множеств X_j, всего множеств X_j ровно $s + n$, значит, верно неравенство $X_i < t_i$, и можно сдвинуть точку y_{i-1} влево так, чтобы выполнились неравенства $X_i < y_{i-1} < t_i$.

Покажем, что для обеспечения левого и правого неравенств нам не пришлось сдвигать вправо и влево одну и ту же точку y_i. В самом деле, передвижение точки y_i вправо необходимо, если $y_i < t_{i-n}$, а передвижение её влево понадобилось бы только при условии $t_i < y_i$.

Значит, в случае **a)** сплайн h существует, причем определяется однозначно. По теореме Будана-Фурье для сплайнов (см. [4, стр. 161]), количество нулей сплайна h с учетом кратности не превосходит $k-1$. Следовательно, кроме точек $\{y_i\}_{i=1}^{k-1}$, сплайн h не имеет других нулей, и все они простые. Кроме того, не существует интервалов, на которых $h \equiv 0$. Это значит, что между точками $\{y_i\}_{i=1}^{k-1}$ функция h сохраняет знак, а в самих точках меняет его. По построению $h(t_0) = S_1$, функция h меняет знак в точках y_i между множествами X_i, следовательно, для всех $i \in \overline{1,k}$ выполняется равенство $\operatorname{sign}\Big(h|_{X_i}\Big) = S_i$, т.е. выполнено условие (6).

Покажем, что условие (7) также выполняется. Мы получили, что функция h поочерёдно принимает значения с чередующимися знаками в k точках альтернанса. По лемме 1, найдётся упорядоченный набор из $k-n=s$ точек $\{u_j\}_{j=1}^{s}$, в которых функция $h^{(n)}$ принимает значения с чередующимися знаками, причем, по лемме 1 и формуле (9), получаем $\operatorname{sign} h^{(n)}(u_1) = (-1)^n \operatorname{sign}\Big(h|_{X_1}\Big) = (-1)^n S_1 = -G_0$. Поскольку $h \in S_n[t_0, t_1, ..., t_s]$, то $h^{(n)}$ имеет те же самые участки постоянства, что и $g_*^{(n)}$, значит условие (7) выполнилось на всём отрезке $[t_0, t_s]$.

Таким образом, в случае **a)** мы смогли построить функцию h, которая удовлетворяет требованиям (6) и (7). В этом случае утверждение теоремы доказано.

b) Случай $k = s+n-1$.

Расширим интервал (t_{s-1}, t_s) вправо до (t_{s-1}, t_s+1). Добавим фиктивную точку альтернанса $x_{k+1} = d+1$ с соответствующим знаком уклонения. Покажем, что при таком добавлении не возникло жёсткого звена. В самом деле, пусть жёсткое звено возникает на отрезке $[t_i, t_s]$. Пусть l — номер первого из множеств X_j, пересекающихся с отрезком $[t_i, t_s]$. Число множеств X_j пересекавщихся с отрезком $[t_i, t_s]$ до добавления было равно $(k+1)-l = (s+n)-l$, количество интервалов равно $s-i$. Поскольку на отрезке $[t_i, t_s]$ жёсткого звена не было, но при добавлении одной точки оно возникло, то до добавления выполнялось одно из равенств:

$$\begin{array}{ll} i) s+n-l = (s-i)+n, & \text{если } G_i = -(-1)^n \cdot S_l, \\ ii) s+n-l = (s-i)+n-1, & \text{если } G_i = (-1)^n \cdot S_l. \end{array}$$

В случае *i)* мы имеем равенство $i = l$. Следовательно,

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{i+n+1} S_l = (-1)^{i+n+1+(l+1)} S_1 = (-1)^{2i+n+2} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (9).

Аналогично, в случае *ii)* выполняется равенство $l = i+1$, следовательно,

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{i+n} S_l = (-1)^{i+n+(l+1)} S_1 = (-1)^{2i+n+2} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что также противоречит условию (9).

Это значит, что описанное выше добавление сводит случай **b)** к случаю **a)**. Итак, в случае **b)** утверждение теоремы также доказано.

c) Случай $k \leq n+s-2$.

Будем добавлять слева и справа от расширенного альтернанса фиктивные точки альтернанса с соответствующими знаками уклонения, расширяя отрезок $[t_0, t_s]$ по мере надобности за счёт удлинения крайних интервалов. При этом заметим, что если мы смогли добавить слева нечетное количество фиктивных точек, то сможем добавить еще одну, следовательно, по прежнему будет выполнено условие (9).

В итоге, мы либо получим один из двух рассмотренных выше случаев, либо возникнет ситуация, когда при добавлении дополнительной точки слева или справа возникает жесткое звено, но в целом на отрезке $[t_0, t_s]$ мощность уже увеличенного альтернанса меньше максимально возможной на 2 или более, т.е. $k \leq n+s-2$. Рассмотрим эту ситуацию. Обозначим через $D_{i,j}$ разность между количеством выпуклых оболочек множеств расширенного альтернанса $\overline{X_i}$, пересекающихся с $[t_i, t_j]$, и числом $j-i$. В этих обозначениях предыдущее неравенство можно записывается в виде

$$D_{0,s} \leq n-2, \tag{10}$$

Выпишем условия наличия жесткого звена на отрезке $[t_i, t_j]$. Через W_i обозначим номер первого из множеств расширенного альтернанса, пересекающихся с отрезком $[t_i, t_s]$. Пусть $w = W_i$, тогда на $[t_i, t_j]$ есть жесткое звено, если

$$\begin{array}{lll} D_{i,j} > n-1, & \text{если} & G_i = (-1)^n S_w, \\ D_{i,j} > n, & \text{если} & G_i = -(-1)^n S_w. \end{array} \tag{11}$$

Поскольку по предположению у нас нет жесткого звена, то

$$D_{i,j} \leq n \quad \forall \quad i,j \tag{12}$$

Имеет место следующее свойство: пусть $p < q < r$, тогда

$$D_{p,r} = D_{p,q} + D_{q,r} - \delta(q), \tag{13}$$

где $\delta(q) = 1$, если $t_q \in \overline{X_l}$ для некоторого l, и $\delta(q) = 0$ в противном случае.

Положим

$$p = \max\{i : D_{0,i} \geq n-1\}. \tag{14}$$

Множество таких i не пусто, так как слева нельзя добавить фиктивную точку альтернанса без возникновения жесткого звена. Из неравенства (10) следует, что $1 \leq p \leq s-1$. Аналогично определим

$$q = \min\{i : D_{i,s} \geq n-1\}. \tag{15}$$

Множество таких i также не пусто (так как справа также нельзя добавить фиктивную точку альтернанса), и из (10) следует, что $1 \leq q \leq s-1$.

Согласно (12) и (14) $n-1 \leq D_{0,p} \leq n$. Покажем, что $D_{0,p} = n-1$. В самом деле, пусть $D_{0,p} = n$, рассмотрим отрезок $[t_p, t_{p+1}]$. Согласно (14), выполняется неравенство

$$D_{0,p+1} \leq n-2. \tag{16}$$

По свойству (13) имеем $D_{0,p+1} = D_{0,p} + D_{p,p+1} - \delta(p)$. По определению, $D_{p,p+1} \geq -1$, значит, если $\delta(p) = 0$, то $D_{p,p+1} - \delta(p) \geq -1$. Если же $\delta(p) = 1$, то с отрезком $[t_p, t_{p+1}]$ пересекается хотя бы одно множество расширенного альтернанса, следовательно, верно неравенство $D_{p,p+1} \geq 0$, откуда $D_{p,p+1} - \delta(p) \geq -1$. Таким образом, в любом случае

$D_{p,p+1} - \delta(p) \geq -1$, следовательно, $D_{0,p+1} \geq D_{0,p} - 1 = n-1$, что противоречит (16). Установили равенство

$$D_{0,p} = n - 1. \tag{17}$$

Покажем, что $q \geq p$. Предположим, что $q < p$, тогда по (13), (15) и (17) получаем

$$D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(p) = D_{q,s} \geq n-1 \quad \text{и} \quad D_{0,q} + D_{q,p} - \delta(q) = D_{0,p} = n-1. \tag{18}$$

Сложение двух этих неравенств даёт

$$D_{q,p} \geq 2n - 2 - (D_{0,q} + D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(q) - \delta(p)). \tag{19}$$

Кроме того, согласно (10),

$$D_{0,s} = (D_{0,q} + D_{q,p} + D_{p,s} - \delta(q) - \delta(p)) \leq n - 2.$$

В этом случае из (19), следует неравенство $D_{q,p} \geq n$. С учетом (12) получаем, что $D_{q,p} = n$. Подставляя это равенство во второе из неравенств (18), получаем равенство

$$D_{0,q} = -1 + \delta(q). \tag{20}$$

Пусть $w = W_q$. В силу неравенств (11) для отрезка $[t_q, t_p]$ и равенства $D_{q,p} = n$ выполнено равенство

$$G_q = -(-1)^n S_w, \tag{21}$$

иначе на $[t_q, t_p]$ есть жёсткое звено.

Если $\delta(q) = 1$, то $D_{0,q} = w - q$. Учитывая (20), получаем равенство $w = q$. Если $\delta(q) = 0$, то X_w не пересекается с $[t_0, t_q]$, следовательно, $D_{0,q} = (w-1) - q$, что с учетом (20) даёт равенство $w = q$. Учитывая (21), получаем следующее равенство

$$G_0 = (-1)^q G_q = (-1)^{n+q+1} S_w = (-1)^{n+q+w} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (9).

Доказали, что $p \leq q$. Равенство $p = q$ также невозможно, так как в этом случае будет иметь место неравенство $D_{0,s} \geq D_{0,p} + D_{p,s} - 1 \geq 2n - 3$. Учитывая (4), получаем, что $D_{0,s} \geq 2n - 3 \geq n - 1$, что противоречит (10). Следовательно, верно неравенство $p < q$.

Введем следующие обозначения:

$$l = \max\{i : X_i \text{ пересекается с } [t_0, t_p]\}, \quad r = \max\{i : [t_0, t_i) \text{ не пересекается с } X_{l+1}\}.$$

Очевидно, что $p \leq r$. Заметим, что по (17) число $p + n - 1 = D_{0,p} + p$ равно числу множеств альтернанса, пересекающихся с отрезком $[t_0, t_p]$, и, следовательно, $l = p + n - 1$. Поскольку $p \geq 1$ и $n \geq 2$, то $l \geq 2$.

Далее рассмотрим два подслучая: 1) $r \geq l$ и 2) $r < l$.

1) Подслучай $r \geq l$.

Это неравенство означает, что на промежутке $[t_0, t_l)$ нет точек альтернанса из X_{l+1}. В этом случае мы построим добавку $h \in S_n[t_0, t_1, ..., t_l]$ и продолжим её при помощи тождественно равной нулю функции на $[t_l, t_s]$. Потребуем, чтобы h удовлетворяла условиям (6) и (7) только на промежутке $[t_0, t_l)$. Добавка, построенная на основе такой функции h, уменьшит уклонение не на всём отрезке $[t_0, t_s]$, а только на $[t_0, t_l)$. Кроме того, она избавит нас от участка пилообразности $[t_0, t_l]$. В результате мы вернемся на начало этапа с отрезком $[t_l, t_s]$ в качестве нового $[t_0, t_s]$. Поскольку $l \geq 2$, то в нем будет меньше интервалов (t_i, t_{i+1}), чем в $[t_0, t_s]$.

Построим на отрезке $[t_0, t_l]$ альтернансное разбиение $\{z_i\}_{i=0}^{l}$. Введем в рассмотрение набор точек $\{y_i\}_{i=0}^{l}$, первоначально положим $y_i = z_i$. Потребуем от h выполнения следующих интерполяционных условий:

1) $h(y_0) = S_1$,

2) $h(y_i) = 0$ при $i \in \overline{1, l-1}$,

3) в точке t_l функция h должна с гладкостью $n-1$ сопрягаться с нулевой функцией, т.е. $h(t_l) = h'(t_l) = ... = h^{(n-1)}(t_l) = 0$.

Необходимыми и достаточными условиями существования и единственности интерполяционного сплайна с краевыми условиями являются (см. [3, стр. 85]):

i) равенство количества условий интерполяции и числа свободных параметров;

ii) выполнение неравенств $d_i \geq i+1$, при $i \in \overline{0, n+1}$, где d_i — есть количество условий, наложенных на сплайн и его производные вплоть до порядка i;

iii) выполнение неравенств $k_{ai} \geq i$ и $k_{bi} \geq l-i$, где k_{ai} и k_{bi} есть количество всех условий, наложенных на сплайн и все его производные на промежутках $[t_0, t_i)$ и $(t_i, t_l]$ соответственно.

Покажем, что эти условия выполняются.

i) Число условий интерполяции равно $l+n$, число свободных параметров равно $l \cdot (n+1) - (l-1) \cdot n = l+n$.

ii) Имеется $l+1$ интерполяционное условие на сам сплайн и по одному на каждую его производную до порядка $n-1$. Это значит, что при $i \leq n-1$ выполняется $d_i = l+1+i \geq i+1$. Учитывая, что $l \geq 2$, получаем оставшиеся неравенства $d_n = l+n \geq n+1$ и $d_{n+1} = l+n \geq n+2$.

iii) Установим первое неравенство. Пусть для какого-то i неравенство не верно, т.е. выполнено $k_{ai} < i$, и, значит, $y_i > t_i$. Покажем, что мы можем передвинуть точку y_i влево так, что будет $X_i < y_i < t_i$. В самом деле, это невозможно, только если не верно неравенство $X_i < t_i$, т.е. множество $\overline{X_i}$ пересекается с отрезком $[t_i, t_p]$. Это означает, что

$$D_{i,p} \geq (l - (i-1)) - (p-i) = n.$$

Из неравенства (12) следует, что $D_{i,p} = n$, а из (11) следует равенство $G_i = -(-1)^n S_i$, и тогда

$$G_0 = (-1)^i G_i = (-1)^{n+1+i} S_i = (-1)^{n+1+i+(i-1)} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (9). Таким образом, верно неравенство $X_i < t_i$, и мы всегда можем сдвинуть точку y_i так, что неравенство $k_{ai} \geq i$ выполнится, при этом сохранятся неравенства $X_i < y_i < X_{i+1}$.

Установим второе неравенство. При $i \geq p$ будет $l-i \leq n-1$, при этом $k_{bi} = n$, т.к. в точке t_l имеется ровно n условий. Поэтому осталось установить неравенство только при $i < p$. Допустим противное, т.е. $k_{bi} < l-i$ для некоторого i. Это значит, что число условий интерполяции на отрезке $[t_i, t_l]$ строго меньше $l-i$. В точке t_l наложено n условий интерполяции, на промежутке $(t_p, t_l]$ других условий нет, следовательно, на отрезке $[t_i, t_p]$ условий строго меньше, чем $l-i-n$. На отрезке $[t_0, t_p]$ имеется ровно l условий, значит, на отрезке $[t_0, t_i]$ их строго больше, чем $l-(l-i-n) = i+n$, т.е. $D_{0,i} > n$, что невозможно по (12).

Таким образом, такой сплайн h существует и единственен. По теореме Будана-Фурье для сплайнов, других нулей, кроме точек $\{y_i\}_{i=1}^{l}$, у сплайна h нет. По построению, точка t_l есть нуль кратности n, следовательно, все остальные нули $\{y_i\}_{i=1}^{l-1}$ простые, в них сплайн меняет знак. Это значит, что на отрезке $[t_0, t_l]$ условие (6) выполнилось.

Установлено, что функция h принимает значения с чередующимися знаками в l точках альтернанса. Покажем, что знак функции $h^{(n)}$ меняется в каждом узле сплайна. Доказательство этого факта похоже на доказательство леммы 3, поэтому приведем его схематично. Мы знаем, что сплайн h (с учётом краевого условия) принимает на упорядоченном наборе из $l+1$ точки знаки S_1, $-S_1$, ..., $\pm S_1$, 0. Следовательно, h' (с учётом краевого условия) принимает на другом упорядоченном наборе из $l+1$ точки значения со знаками $-S_1$, S_1, ..., $\mp S_1$, 0. Продолжая этот процесс, мы убедимся, что $h^{(n-1)}$ в $(l+1)$ точке принимает значения со знаками $(-1)^{n-1}S_1$, $-(-1)^{n-1}S_1$, ..., $\pm(-1)^{n-1}S_1$, 0. Таким образом, функция $h^{(n)}$ в l точках принимает значения со знаками $(-1)^n S_1$, $-(-1)^n S_1$, ..., $\mp(-1)^n S_1$. Заметим, что $\operatorname{sign}\Big(h^{(n)}\Big|_{(t_0,\, t_1)}\Big) = (-1)^n S_1$. Всего у $h^{(n)}$ есть l участков постоянства, следовательно, знаки $h^{(n)}$ чередуются, т.е. в каждом узле $h^{(n)}$ меняет свой знак. Поскольку, по (9),

$$\operatorname{sign}\Big(h^{(n)}\Big|_{(t_0,\, t_1)}\Big) = (-1)^n S_1 = -G_0 = -\operatorname{sign}\Big(g_*^{(n)}\Big|_{(t_0,\, t_1)}\Big),$$

то знаки функций $h^{(n)}$ и $g_*^{(n)}$ противоположны на всем отрезке $[t_0, t_l]$. Таким образом, на отрезке $[t_0, t_l]$ условие (7) также выполнилось.

2) Подслучай $r < l$. В этом случае мы добавим специальным образом внутрь отрезка $[t_0, t_s]$ две фиктивные точки альтернанса и покажем, что при этом не возникнет жёсткого звена. После этого надо будет вернуться на начало этапа, при этом k увеличится на 2, а s останется без изменений.

По построению, выполнено неравенство $p \le r$, на $[t_0, t_r)$ нет точек из X_{l+1}, а также, по предположению,

$$r < l. \tag{22}$$

Опишем алгоритм добавления пары фиктивных точек альтернанса. Мы будем их располагать между множествами X_l и X_{l+1}, знаки уклонения назначим так, чтобы знаки уклонения в старых точках альтернанса не изменились. Если $X_l \subset [t_0, t_p)$, то добавим две фиктивные точки альтернанса в промежуток $[t_p, t_{p+1})$, иначе добавим их между X_l и следующей точкой t_i. Видно, что в любом случае они попадут внутрь одного интервала (t_i, t_{i+1}) при $i \ge p$.

Покажем, что добавление этих двух точек не вызовет появления жесткого звена. В самом деле, пусть возникло жесткое звено на отрезке $[t_u, t_v]$. Очевидно, что обе добавленные точки альтернанса лежат на отрезке $[t_u, t_v]$. Это значит, что $p < v$, что с учётом (14) даёт неравенство

$$D_{0,v} \le n - 2 \tag{23}$$

Покажем, что $u \ge p$. Предположим, что $u < p$, тогда получаем следующую цепочку неравенств $0 \le u < p < v$. Из (13) и (17) следует равенство

$$n - 1 = D_{0,p} = D_{0,u} + D_{u,p} - \delta(u), \tag{24}$$

поэтому

$$D_{u,p} = (n-1) - D_{0,u} + \delta(u). \tag{25}$$

По свойству (13) и неравенству (23), получаем неравенство $D_{0,v} = D_{0,u} + D_{u,v} - \delta(u) \le n-2$, откуда $D_{0,u} \le (n-2) + \delta(u) - D_{u,v}$. Подставляя это неравенство в (25), получаем неравенство

$$D_{u,p} \ge D_{u,v} + 1. \tag{26}$$

Пусть $w = W_u$. Возникновение жёсткого звена при добавлении этих двух точек означает, что до добавления выполнялось одно из двух неравенств:

$$\begin{array}{ll} i) D_{u,v} \geq n-2, & \text{если} \quad G_u = (-1)^n S_w, \\ ii) D_{u,v} \geq n-1, & \text{если} \quad G_u = -(-1)^n S_w. \end{array} \tag{27}$$

В случае *i)* выполняется неравенство $D_{u,v} \geq n-2$, подставляя его в (26), получаем неравенство $D_{u,p} \geq n-1$. Поскольку $G_u = (-1)^n S_w$, и на отрезке $[t_u, t_p]$ нет жесткого звена, то из (11) получаем $D_{u,p} \leq n-1$. Значит, $D_{u,p} = n-1$. Подставляя это равенство в (24), получаем равенство

$$D_{0,u} = \delta(u). \tag{28}$$

Поскольку X_w — первое из множеств, пересекающееся с $[t_u, t_s]$, то $\delta(u)$ может быть равно единице, только если X_w пересекается и с $[t_0, t_u]$. Равенство (28) означает, что $w - 1 = u$. В этом случае получаем

$$G_0 = (-1)^u G_u = (-1)^{n+u} S_w = (-1)^{n+u+w-1} S_1 = (-1)^{n+u+u} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (9).

Аналогично, в случае *ii)* выполняется неравенство $D_{u,v} \geq n-1$. Подставляя его в (26), получаем $D_{u,p} \geq n$. Поскольку на $[t_u, t_p]$ нет жёсткого звена, то из (11) следует неравенство $D_{u,p} \leq n$. Значит, $D_{u,p} = n$. Подставляя это равенство в (24), будем иметь $D_{0,u} = \delta(u) - 1$. Из этого равенства получаем, что $w - 1 = u - 1$. Следовательно,

$$G_0 = (-1)^u G_u = -(-1)^{n+u} S_w = -(-1)^{n+u+w-1} S_1 = -(-1)^{n+u+u-1} S_1 = (-1)^n S_1,$$

что противоречит условию (9). Следовательно, $p \leq u$.

Покажем, что u не может быть равно p. Предположим противное, пусть $u = p$. Рассмотрим два случая:

i) $\delta(p) = 0$ и ii) $\delta(p) = 1$.

В случае i) X_l не пересекается с $[t_p, t_v]$, следовательно, с учетом (4) и (27), получаем соотношение $D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} \geq n-1+n-2 = 2n-3 \geq n-1$, которое противоречит (23).

В случае ii) множество X_l является первым из множеств расширенного альтернанса, которые пересекаются с $[t_p, t_v]$, следовательно,

$$D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} - 1 \geq (n-1) + (n-2) - 1 = 2n - 4.$$

Применение (23) даёт $2n - 4 \leq n - 2$, т.е. $n \leq 2$. Сопоставив последнее неравенство с (4), получаем, что в этом случае $n = 2$.

Поскольку $l = p + n - 1$, то

$$G_p = (-1)^p G_0 = -(-1)^{n+p} S_1 = -(-1)^{n+p+p+n} S_l = -S_l. \tag{29}$$

Подставляем $n = 2$ в (27), с учетом (29) будем иметь неравенство $D_{p,v} \geq n-1$. Отсюда устанавливаем следующее неравенство

$$D_{0,v} = D_{0,p} + D_{p,v} - 1 \geq (n-1) + (n-1) - 1 = 2n - 3 \geq n - 1,$$

что противоречит (23).

Таким образом, верно неравенство $p < u$.

По построению, выполнено неравенство $u \leq r$, т.е. верны следующие неравенства $p < u \leq r$. Это значит, что на (t_p, t_u) не может быть других множеств альтернанса, кроме X_l, отсюда $D_{0,u} = l - u = (p+n-1) - u = (n-1) - (u-p)$. По построению, добавленные точки лежат правее t_u. Учитывая неравенство $u \geq p+1$, можно утверждать, что добавленные точки лежат правее t_{p+1}. По алгоритму добавления фиктивных точек альтернанса получаем, что X_l пересекается с $[t_u, t_v]$, т.е. $\delta(u) = 1$. Таким образом, справедливо равенство

$$D_{0,v} = D_{0,u} + D_{u,v} - 1 = (n-1) - (u-p) + D_{u,v} - 1.$$

В сочетании с (23) получаем неравенство

$$u - p \geq D_{u,v}. \tag{30}$$

В силу (27), в любом случае имеет место неравенство $D_{u,v} \geq n-2$, отсюда, по (30), следует, что $u - p \geq n-2$, т.е. $u \geq p+n-2 = l-1$.

Рассмотрим два случая: i) $u < r$ и ii) $u = r$.

В случае i) получаем $r > u \geq l-1$, т.е. $r \geq l$, что противоречит (22).

В случае ii) справедливо неравенство $r \geq l-1$. По (22), имеет место неравенство $r < l$, поэтому $u = r = l-1$. Отсюда получаем, что

$$G_{l-1} = (-1)^{l-1} G_0 = (-1)^{n+l} S_1 = (-1)^{n+l+l-1} S_l = -(-1)^n S_l$$

Поскольку X_l — первое из множеств расширенного альтернанса, пересекающихся с отрезком $[t_u, t_v]$, то в формуле (27) надо использовать $w = l$. Следовательно, по формуле (27) и с учетом равенства $G_{l-1} = -(-1)^n S_l$, устанавливаем неравенство $D_{u,v} \geq n-1$. Применяя (30), доказываем неравенство $u-p \geq n-1$. Итак, имеет место неравенство $r - p \geq n-1$, и, значит, $r \geq p+n-1 = l$, что противоречит (22).

Таким образом, предположив, что при описанном добавлении двух фиктивных точек альтернанса возникает жёсткое звено, мы пришли к противоречию. Подслучай **2)** случая **c)** полностью рассмотрен.

Теорема доказана.

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

Список литературы

[1] *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения, М.: Наука, 1976

[2] *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. М.* Методы сплайн функций, М.: Наука, 1980

[3] *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения, М.: Наука, 1987

[4] *Larry L. Schumaker* Spline functions: basic theory, N. Y., 1981