ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЯМИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Мироненко А.В. [1]

В докладе рассматривается вопрос равномерного приближения функций заданных на отрезке $[a, b]$ функциями с ограниченной производной.

Через $\mathcal{D}^n$, обозначим класс функций, заданных на $[a, b]$, имеющих абсолютно непрерывную $n-1$-ую, и ограниченную единицей n-ую производную, т.е.

$$\mathcal{D}^n = \{u(x) \in AC^{(n-1)}[a, b] : \left|u^{(n)}(x)\right| \leq 1 \text{ там, где существует } u^{(n)}(x)\}$$

Элемент наилучшего приближения в этом классе для произвольной функции $f \in C[a, b]$ всегда существует, но, вообще говоря, не является единственным. Характеризации элементов наилучшего приближения можно найти в [1] (при $n = 1$) и в [2] (при произвольном n).

Определим расстояние от функции $u(x) \in C[a, b]$ до множества $F \subset C[a, b]$ как $d(u, F) = \min\limits_{f(x) \in F} \|u(x) - f(x)\|_{C[a,b]}$

Обозначим через $O_\varepsilon(F) = \{u(x) \in C[a, b] \mid d(u, F) \leq \varepsilon\}$ – ε-окрестность множества F.

Расстоянием по Хаусдорфу между множествами F и G назовем число $h(F, G) = \max(d_1, d_2)$, где $d_1 = \min\{d : \ F \subseteq O_d(G)\}$, $d_2 = \min\{d : \ G \subseteq O_d(F)\}$.

Теорема. *Пусть даны функции $f(x)$ и $g(x)$ из $C[a, b] \backslash \mathcal{D}^n$. Обозначим через F и G соответственно их множества элементов наилучшего приближения в $\mathcal{D}^n$. Тогда верно неравенство*

$$h(F, G) \leq 2 \cdot \|f - g\|_{C[a,b]}$$

Константа в неравенстве не может быть уменьшена.

Пусть множество Q лежит в $[a, b]$. Обозначим через $\|\cdot\|_{CQ}$ равномерную норму на множестве Q, т.е. $\|f(x)\|_{CQ} = \max\limits_{x \in Q} |f(x)|$.

Обозначим через $E_{\mathcal{D}^n}(f) = \inf\limits_{g \in \mathcal{D}^n} \|f - g\|_{C[a,b]}$ величину наилучшего равномерного приближения функции f классом $\mathcal{D}^n$.

Обозначим через P_n^1 множество полиномов степени n, у которых производная порядка n ограничена по модулю единицей.

Обозначим через $E_{P_n^1}^{Q}(f) = \inf\limits_{g \in P_n^1} \|f - g\|_{CQ}$ величину наилучшего приближения функции f классом P_n^1 в норме CQ.

Легко показать (см., например, [1]), что при $n = 1$ верны равенства

$$E_{\mathcal{D}^1}(f) = \sup_{a \leq x_1 < x_2 \leq b} E_{P_1^1}^{\{x_1, x_2\}}(f) = \sup_{a \leq x \leq x+h \leq b} E_{P_1^1}^{\{x, x+h\}}(f)$$

При $n = 2$ верна следующая теорема.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №02-01-00782.

Теорема. *Пусть дана функция* $f(x) \in C[a,b] \setminus \mathcal{D}^2$. *Тогда верны следующие неравенства*

$$E_{\mathcal{D}^2}(f) \leq 2 \cdot \sup_{a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b} E_{P_2^1}^{\{x_1, x_2, x_3\}}(f);$$

$$\sup_{a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b} E_{P_2^1}^{\{x_1, x_2, x_3\}}(f) \leq 2 \cdot \left[\sup_{a \leq x \leq x+2h \leq b} E_{P_2^1}^{\{x, x+h, x+2h\}}(f) \right]$$

Константы в каждом из неравенств не могут быть уменьшены.

Список литературы

[1]. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения. - М.: Наука, 1976, С. 219-220.

[2]. *Мироненко А.В.* Равномерное приближение функциями с ограниченной производной // Проблемы теоретической и прикладной матетматики, Труды 32-й региональной молодежной конференции.- Екатеринбург: УрО РАН, 2001, С. 40-41.